Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 8 im Wintersemester 2021 (am 3.12.21):
Die Strukturgarbe einer algebraischen Menge

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.
y.z	verweist auf Aussage y.z des aktuellen Abschnitts der aktuellen Vorlesung

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

5c Die Strukturgarbe einer algebraischen Menge

5c.0 Vorbemerkung

Die in 5b.2.1 eingeführte Abbildung

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U),$$

welche jeder offenen Teilmenge U einer algebraischen Menge X den Ring der regulären Funktionen auf U zuordnet, ist ein Beispiel für eine Garbe, welche Strukturgarbe von X heißt. Zur Rechtfertigung dieser Bezeichnung führen wir zunächst den Begriff der Garbe ein und beschreiben einige der wichtigsten Eigenschaften dieses Begriffe.
Für jeden topologischen Raum X betrachten dazu die Kategorie

$$\mathrm{Top}(X)$$

deren Objekte die offenen Mengen von X sind

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Top}(X)) := \text{Menge der offenen Mengen von } X,$$

und deren Morphen natürlichen Einbettungen dieser offenen Mengen ineinander,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}(X)}(U, V) := \begin{cases} \{U \hookrightarrow V\} & \text{falls U Teilmengen von Y ist} \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Hom-Mengen dieser Kategorie sind also einelementig oder leer. Die Morphismen-Komposition ist gerade die Zusammensetzung gewöhnlicher Abbildungen.

5b.1 Garben

5b.1.1 Der Begriff der Prägarbe

Eine <u>Prägarbe</u> auf dem topologischen Raum X mit Werten in der Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Funktor

$$F\colon \mathrm{Top}(X)^{op} \longrightarrow \mathcal{C},$$

d.h. ein kontravarianter Funktor auf Top(X) mit Werten in $\mathcal{C}$
Für jede offene Menge U von X heißen dann die Elemente von F(U) <u>Schnitte</u> von F über U. Für je zwei offene Mengen U, V von X mit $U \subseteq V$ heißen die Morphismen

$$F(U \hookrightarrow V)\colon F(V) \longrightarrow F(U)$$

<u>Restriktionen</u> von F. Für das Bild eines Schnitts $s \in F(V)$ wird auch die Bezeichnung

$$s|_U := F(U \hookrightarrow V)(s)$$

verwendet.

Beispiel 1

Sei $f\colon Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ bezeichne

$$\Gamma_f(U) := \{s: U \longrightarrow Y \mid s \text{ stetig und } f \circ s = 1_U\}$$

die Menge der Schnitte von f über U, d.h. der stetigen Abbildungen $s: U \longrightarrow Y$, für welche die Zusammensetzung $f \circ s$ die identische Abbildung von U ist. Für je zwei offene Teilmengen U, V von X mit $U \subseteq V$ und jeden Schnitt $s \in \Gamma_f(V)$ ist die Einschränkung $s|_U$ ein Schnitt von f über U. Die Zuordnungen

$$\mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Ens},\ U \mapsto \Gamma_f(U),$$

und

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}(X)}(U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Gamma_f(V), \Gamma_f(U)),\ U \hookrightarrow V \mapsto (s \mapsto s|_U)$$

definieren einen kontravarianten Funktor

$$\Gamma_f: \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Ens},$$

d.h. eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie der Mengen.

Beispiel 2

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ sei

$$\mathbf{C}^r_X(U) := \{s: U \longrightarrow \mathbb{R} \mid s \text{ ist r-mal stetig differenzierbar }\}$$

die $\mathbb{R}$-Algebra der reellwertigen r-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf U. Dabei lassen wir den Fall $r = \infty$ zu, d.h. $\mathbf{C}^\infty_X(U)$ bezeichne die $\mathbb{R}$-Algebra der glatten reellwertigen Funktionen auf U. Weiter lassen wir den Fall $r = \omega$ zu. In diesem Fall soll

$$C^\omega_X(U)$$

den Ring der reellwertigen analytischen Funktionen auf U bezeichnen (d.h. der Funktionen, die sich lokal in jedem Punkt von U in eine Potenzreihe entwickeln lassen).
In jedem dieser Fälle ist die Einschränkung einers Elements von $\mathbf{C}^r_X(U)$ auf eine offene Teilmenge $V \subseteq U$ ein Element von $\mathbf{C}^r_X(V)$. Die Abbildung

$$U \mapsto \mathbf{C}^r_X(U)$$

definiert dann zusammen mit den gewöhnlichen Einschränkungen auf offene Teilmengen eine Prägarbe

$$\mathbf{C}^r_X: \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathbb{R}\text{-Alg}$$

auf X mit Werten in der Kategorie der $\mathbb{R}$-Algebren.
Ist X eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ und U wie bisher offen in X, so bezeichne

$$\mathbf{C}^r_X(U)$$

den Ring der komplexwertigen analytischen (d.h. der holomorphen) Funktionen auf U.
In diesem Fall erhält man eine Prägarbe

$$\mathbf{C}^r_X: \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathbb{C}\text{-Alg}$$

auf X mit Werten in der Kategorie der $\mathbb{C}$-Algebren.

Beispiel 3

Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge des k^n (mit k algebraische abgeschlossen). Für je zwei offene Teilmengen U und V von X mit $U \subseteq V$ ist die Einschränkung einer regulären Funktione

$$f: V \longrightarrow k$$

auf V eine reguläre Funktion auf U. Die Einschränkung auf U definiert also einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U),\ f \mapsto f|_U,$$

und $\mathcal{O}_X$ wird zu einer Prägarbe

$$\mathcal{O}_X: \mathrm{Top}(X) \longrightarrow k\text{-Alg}$$

auf X mit Werten in der Kategorie der k-Algebren.

Bemerkungen

Die Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ sind die Objekte einer Kategorie

$$\mathbf{P}_{X,\mathcal{C}}$$

deren Morphismen gerade die funktoriellen Morphismen sind, d.h. für je zwei Prägarben

$$F', F'': \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

ist ein Morphismus $\varphi: F' \longrightarrow F''$ gegeben durch eine Familie

$$\{F'(U) \xrightarrow{\varphi_U} F''(U)\}_{U \text{ offen in } X}$$

von Morphismen aus $\mathcal{C}$, wobei für je zwei offene Mengen U, V von X mit $U \subseteq V$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F'(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & F''(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F'(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & F''(U) \end{array}$$

kommutativ ist, wobei die vertikalen Morphismen die Garben-Restriktionen sein sollen.

5b.1.2 Der Begriff der Garbe

Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind (zum Beispiel Gruppen, abelsche Gruppen, Ringe, kommutative Ringe mit 1 oder Moduln). Eine Prägarbe

$$F: \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

heißt dann Garbe, wenn für jede offene Teimenge U von X und jede offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. Für je zwei Schnitts $s', s'' \in F(U)$ mit $s'|_{U_i} = s''|_{U_i}$ für jedes $i \in I$ gilt $s'=s''$.

2. Für jede Familie $\{s_i\}_{i \in I}$ von Schnitten $s_i \in F(U_i)$ mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \text{ für beliebige } i,j \in I$$

gibt es einen Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i \in I$.

Bemerkungen

(i) Die Definition läßt sich auf den Fall verallgemeinern, daß $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie mit unendlichen Produkten ist. Die beiden Garben-Axiome übersetzen sich dann in die Bedingung, daß das Diagramm

$$F(U) \xrightarrow{\gamma} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} F(U_i \cap U_j)$$

exakt ist, d.h. γ ist der Differenzkern von α und β. Dabei sind α, β und γ verallgemeinerte Varianten der Abbildungen im obigen Spezialfall mit

$$\gamma(s) := \{s_i\}_{i\in I},$$

$$\alpha(\{s_i\}_{i\in I}) := \{s_i|_{U_i \cap U_j}\}_{(i,j)\in I\times I},$$

$$\beta(\{s_i\}_{i\in I}) := \{s_j|_{U_i \cap U_j}\}_{(i,j)\in I\times I}$$

(ii) Der Garben-Begriff läßt sich auf den Fall beliebiger Kategorien $\mathcal{C}$ verallgemeineren (mit Hilfe des Begriffs der überdeckenden Siebe).

(iii) Die drei Beispiele von 5b.1.1 für Prägarben sind sogar Garben, wie man direkt an den Defintionen von deren Schnitten ablesen kann.

(iv) Die Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ sind die Objekte einer Kategorie

$$\mathbf{Sh}_{X,\mathcal{C}}$$

deren Morphismen gerade die Prägarben-Morphismen sind, d.h. die Garben-Kategorie ist eine vollen Teilkategorie der Prägarben-Kategorie $\mathbf{P}_{X,\mathcal{C}}$.

5b.1.3 Halme

Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind,

$$F: \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

eine Prägarbe und

$$x \in X$$

ein Punkt. Auf der Menge der Paare

$$\{ (s, U) \mid x \in U \subseteq X, U \text{ offen}, s \in F(U) \} \qquad (1)$$

bestehend aus einer offenen Menge U von X mit $x \in U$ und einem Schnitt $s \in F(U)$ definieren wir wie folgt eine Äquivalenz-Relation. Zwei Paare (s', U') und (s", U") aus dieser Menge heißen äquivalent, symbolisch

$$(s', U') \sim (s'', U''),$$

wenn es eine offene Umgebung U von x gibt mit $U \subseteq U' \cap U''$ und $s'|_U = s''|_U$. Die Äquivalenzklasse eines Paares (s, U) aus dieser Menge heißt Keim des Schnittes s im Punkt x und wird mit

$$[s]_x \text{ oder genauer mit } [(s,U)]_x$$

bezeichnet. Die Menge der Äquivalenzklassen dieser Menge heißt Halm von F in x und wird mit

$$F_x := \{[(s,U)] \mid x \in U, U \text{ offen}, s \in F(U)\}$$

bezeichnet.

Beispiel

Seien $X \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$,

$$F := \mathcal{O}_X := \mathbf{C}^\omega_X$$

die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Für jedes $x = (x_1,...,x_n) \in X$ bezeichnen wir mit

$$\mathbb{C}\{\{T_1,...,T_n\}\}_x$$

den Ring der in x konvergenten Potenzreihen. Für jedes Paar (s, U) aus der Menge (1) ist dann die Potenzreihenentwicklung

$$\hat{s}(T_1,...,T_n) := \sum_{0\le\nu_i\in\mathbb{Z}} \frac{\partial^{\nu_1+...+\nu_n} s}{\partial T_1^{\nu_1},...,\partial T_n^{\nu_n}}(x)\,(T_1-x_1)^{\nu_1}\bullet...\bullet(T_n-x_n)^{\nu_n}$$

von s im Punkt x ein wohldefiniertes Element dieses Ring, welches nur vom Keim [s] abhängt. Wir erhalten so eine wohldefinierte Abbildung

$$\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathbb{C}\{\{T_1,...,T_n\}\}_x\ ,\ [s] \mapsto \hat{s}.$$

Weil jede in x konvergente Potenzreihe eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von x definiert, ist diese Abbildung surjektiv. Weil zwei holomorphe Funktionen mit derselben Potenzreihenentwicklung in einer Umgebung übereinstimmen, ist sie bijektiv. An der Abbildungsvorschrift liest man direkt ab, daß es sich um einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren handelt. Wir können deshalb den Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ mit dem Ring der konvergenten Potenzreihen im Punkt x identifizieren.

Bemerkungen

(i) Ist $\mathcal{C}$ die Kategorie der Gruppen, der abelschen Gruppen, der Ringe, der kommutativen Ringe mit 1, der Moduln über einem Ring oder einem kommutativen Ring mit 1, so liegen die Halme von F ebenfalls in dieser Kategorie.

(ii) Die Abbildungen

$$\mathbf{P}_{X,\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbf{Ens}\ ,\ F \mapsto F_x, \text{ und } \mathbf{P}_{X,\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbf{Ens}\ ,\ F \mapsto F_x,$$

lassen sich in natürlicher Weise zu (kovariaten) Funktoren fortsetzen, wobei man im Fall der Kategorien von Bemerkung (i) die Kategorie Ens durch die Kategorie $\mathcal{C}$ ersetzen kann.

(iii) Genauer, jeder Morphismus φ: F' $\longrightarrow$ F" von Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ definiert für jeden Punkt $x \in X$ definiert eine Abbildung

$$\varphi_x : F'_x \longrightarrow F''_x\ ,\ [s]_x \mapsto [\varphi(x)]_x, \tag{2}$$

der Halme in x, welche ein Morphismus von $\mathcal{C}$ ist, wobei für je zwei Morphismen von Prägarben, sagen wir

$$F \xrightarrow{\varphi} F' \xrightarrow{\varphi'} F'',$$

gilt

$$(\varphi'\circ\varphi)_x = \varphi'_x\circ\varphi_x$$

(wie man direkt an der Abbildungsvorschrift (2) abliest). Die Abbildung φ_x ist durch die Eigenschaft charakerisiert, daß für jede offene Umgebung U von x das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} s \arrow[d, mapsto] & F'(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & F''(U) \arrow[d] & s \arrow[d, mapsto] \\ {[s]_x} & F'_x \arrow[r, "\varphi_x"] & F''_x & {[s]_x} \end{tikzcd}$$

Die vertikalen Abbildungen sollen dabei jeden Schnitt s auf dessen Halm im Punkt x abbilden.

Index

Inhalt